### Лабораторная работа №3 «Задача Коши для уравнения теплопроводности»

**Цель работы:** определить оптимальное решение однокритериальных и многокритериальных задач в простейших случаях.

### Краткая теория

http://pers.narod.ru/study/methods/5.files/image001.gifhttp://pers.narod.ru/study/methods/5.files/image002.gifМногие задачи науки и техники сводятся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). ОДУ называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции. В общем виде ОДУ можно записать следующим образом:

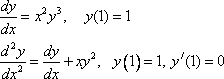
, где x – независимая переменная, - i-ая производная от искомой функции. n - порядок уравнения. Общее решение ОДУ n–го порядка содержит n

http://pers.narod.ru/study/methods/5.files/image004.gifпроизвольных постоянных http://pers.narod.ru/study/methods/5.files/image003.gif , т.е. общее решение имеет вид .

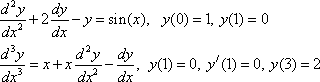
Для выделения единственного решения необходимо задать n дополнительных условий. В зависимости от способа задания дополнительных условий существуют два различных типа задач: задача Коши и краевая задача. Если дополнительные условия задаются в одной точке, то такая задача называется задачей Коши. Дополнительные условия в задаче Коши называются начальными условиями. Если же дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т.е. при различных значениях независимой переменной, то такая задача называется краевой. Сами дополнительные условия называются краевыми или граничными.

Ясно, что при n=1 можно говорить только о задачи Коши.

### Примеры постановки задачи Коши:

****

**Примеры краевых задач:**



Решить такие задачи аналитически удается лишь для некоторых специальных типов уравнений.

### Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций.

**Теорема 1.**

Пусть *D* - ограниченная область в R*n*. Если решение *u*(*x*,*t*) смешанной задачи для уравнения теплопроводности

*ut*(*x*,*t*)−*a*2(*x*,*t*)Δ*xu*(*x*,*t*)=*f*(*x*,*t*), (*x*,*t*)∈*G*=*D*×(0;*T*) с начальными условиями

*u*(*x*,0)=*u*0(*x*), *u*(0)∈*C*(*D*¯)

с граничными условиями первого рода

*u*(*x*,*t*)|*x*∈∂*D*=*v*(*x*,*t*), *v*(*x*,*t*)∈*C*(∂*D*×[0;*T*])

существует в классе функций *C*2,1*x*,*t*(*G*)∩*C*(*G*¯), то оно единственно в этом классе и непрерывно зависит от начальных и граничных данных (в равномерной метрике).

Доказательство теоремы 1. Единственность. Пусть *u*~ и *u*^ - решение задачи. Тогда их разность *u*=*u*~−*u*^ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями:

*ut*(*x*,*t*)=*a*2(*x*,*t*)Δ*xux*(*x*,*t*), (*x*,*t*)∈*G*,

*u*(*x*,0)=0,

*u*(*x*,*t*)|*x*∈∂*D*=0.

Согласно принципу максимума в ограниченной области выполняются неравенства 0⩽*u*(*x*,*t*)⩽0 (*x*,*t*)∈*G*¯

Следовательно *u*~=*u*^ в *G*¯.

Непрерывная зависимость. Пусть теперь *u*~ и *u*^ - решение задачи Коши отвечающие различным начально-краевым данным: *u*0~,*u*0^ и *v*~,*v*^ соответственно.

Тогда разность *u*=*u*~−*u*^ является решением смешанной задачи для однородного уравнения теплопроводности

*ut*(*x*,*t*)=*a*2(*x*,*t*)Δ*xu*(*x*,*t*), (*x*,*t*)∈*G* с начальными условиями *u*(*x*,0)=*u*0^−*u*0~

и граничными условиями

*u*(*x*,*t*)|*x*∈∂*D*=*v*~(*x*,*t*)−*v*^(*x*,*t*).

Воспользуемся для функции *u* принципом максимума, получаем оценку

|*u*~(*x*,*t*)−*u*^(*x*,*t*)|⩽max{sup*D*¯|*u*0~−*u*0^,sup∂*D*×[0;*T*]|*v*~−*v*^|}, (*x*,*t*)∈*G*¯,

что означает непрерывную зависимость решения от начальных и краевых данных в равномерной метрике. Из принципа единственности максимума в неограниченной области вытекает следующее

### Теорема 2.

Если решение задачи Коши *ut*(*x*,*t*)−*a*2(*x*,*t*)Δ*xu*(*x*,*t*)=*f*(*x*,*t*), (*x*,*t*)∈*G*=R*n*×(0;*T*), *u*(*x*,0)=*u*0(*x*), *u*0∈*C*(R*n*)

с ограниченными начальными данными *u*0 существует в классе функций *C*2,1*x*,*t*(*G*)∩*C*(*G*¯)∩*B*(*G*¯), то оно единственно в нем и непрерывно зависит от начальных данных.

### Задания для самостоятельной работы

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

В приведённом примере решается задача Коши, то есть, ищется решение дифференциального уравнения первого порядка вида dy/dx = f(x,y) на интервале x ∈ [x0,xn] при условии y(x0)=y0 и равномерном шаге сетки по x.

Решение выполняется методами Эйлера, "предиктор-корректор" (он же модифицированный метод Эйлера) и методом Рунге-Кутта 4 порядка точности. Пример может служить образцом для Ваших решений, правда, функцию придётся перепрограммировать несколько раз при различных значениях аргумента - поскольку без применения макросов на VBA Excel не позволяет создать полноценную функцию, которую было бы удобно вызывать с разными значениями аргументов.

Здесь решается уравнение dy/dx = 2x-y+x2 на интервале [0,2], начальное значение y(0)=0, для оценки точности задано также точное решение в виде функции u(x)=x2. Оценка погрешности делается в норме L1, как и принято в данном случае.

